СТАБИЛЬНЫЕ ТЕОРИИ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СЧЁТНЫХ МОДЕЛЕЙ (РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ЛАХЛАНА)

С. В. СУДОПЛАТОВ

Аннотация

В работах [1–3] приведены синтаксические модификации генерической конструкции Хрушовского—Хервига [4, 5], позволяющие строить примеры насыщенных моделей стабильных генерических властных орграфов [6] с почти несущественными упорядоченными раскрасками [7]. Интерес к этим конструкциям объясняется известной *проблемой Лахлана* о существовании стабильной теории T с конечным, но большим единицы числом $I(T,\omega)$ попарно неизоморфных счетных моделей. Теории T, для которых $1 < I(T,\omega) < \omega$, называются *эренфойхтовыми.* Любая эренфойхтова теория содержит неглавный властный тип, который, как показано в [6], в свою очередь локально содержит структуру властного орграфа.

Стабильность теорий рассматриваемых властных орграфов обеспечивается балансом между числом элементов и числом бинарных связей в конечных структурах $\mathcal{A}$ (составляющих генерическую модель [8]) посредством следующей *предранговой* функции $y(\cdot)$, ограниченной снизу положительными значениями счетной серии монотонно возрастающих последовательностей специального вида с бесконечными пределами:

$$y(\mathcal{A}) = 2\cdot|A_f| + |A_{\rm nf}| - \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^Q\cdot e_k^Q(\mathcal{A}),$$

где A_f — множество развилочных вершин в $\mathcal{A}$ (вершина a в бесконтурном графе $\langle X,Q\rangle$ называется *развилочной*, если существуют вершины $b,c,d\in X$, а также дуги $(b,a),(a,c),(a,d)\in Q$ или $(a,b),(c,a),(d,a)\in Q$); $A_{\rm nf}=A\backslash A_f$; $e_1^Q(\mathcal{A})$ — число дуг в $\mathcal{A}$; $e_k^Q(\mathcal{A})$, $k\geq 2$, — число пар $(a,b)\in A^2$, связанных лишь внешними над $\mathcal{A}$ кратчайшими (a,b)-маршрутами длины k и такими, что никакой (a,b)-маршрут длины k не содержит внешних *принудительных* развилок, т.е. развилок, без учета которых число внешних связей становится достаточно большим; α_k^Q — веса кратчайших маршрутов длины k, $0<\alpha_{k+1}^Q\ll\alpha_k^Q<\frac{1}{2}$.

Конструкция синтаксической модификации [8, 9] слияний Хрушовского [10, 11] с использованием предранговой функции

$$y'(\mathcal{A}) = 2 \cdot |A_f| + |A_{\mathrm{nf}}| - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^Q \cdot e_k^Q(\mathcal{A}) - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^P \cdot e_k^P(\mathcal{A}) - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^R \cdot e_k^R(\mathcal{A}),$$

(где $e_k^P(\mathcal{A})$ — число $P_{i,n}$-ребер в структуре $\mathcal{A}$, связывающих элементы цвета n с элементами бо́льших цветов, α_k^P — веса $P_{i,n}$-ребер, $k = c(i,n)$, $i \in \omega$, $0 < \alpha_{k+1}^P \ll \alpha_k^P < \frac{1}{2}$; $e_k^R(\mathcal{A})$ — число R_k-ребер в структуре $\mathcal{A}$, связывающих одноцветные элементы, α_k^R — веса R_k-ребер, $0 < \alpha_{k+1}^R \ll \alpha_k^R < \frac{1}{2}$) позволяет перенести основной результат работы [12] о всевозможных реализациях основных параметров эренфойхтовости на класс стабильных теорий:

Теорема 1. *Для любого конечного предупорядоченного множества $\langle X, \leq \rangle$ с наименьшим элементом x_0 и наибольшим классом $\widetilde{x_1}$ в упорядоченном фактор-множестве $\langle X, \leq \rangle/\!\sim$ по отношению $\sim$ (где $x \sim y \Leftrightarrow x \leq y$ и $y \leq x$), а также для любой функции $f : X/\!\sim\, \to \omega$, удовлетворяющей условиям $f(\widetilde{x_0}) = 0$, $f(\widetilde{x_1}) > 0$ при $|X| > 1$, $f(\widetilde{y}) > 0$ при $|\widetilde{y}| > 1$, существует стабильная генерическая теория T и изоморфизм $g : \langle X, \leq \rangle \widetilde{\to} \mathrm{RK}(T)$ такой, что $\mathrm{IL}(g(\widetilde{y})) = f(\widetilde{y})$ для любого $\widetilde{y} \in X/\!\sim$.*

Тем самым справедлива следующая теорема, представляющая решение проблемы Лахлана.

Теорема 2. *Для любого натурального числа $n \geq 3$ существует стабильная теория T_n, у которой $I(T_n, \omega) = n$.*

Список литературы

[1] *Судоплатов С. В.* Малые стабильные генерические графы с бесконечным весом. Двудольные орграфы // Матем. труды. 2006. Т. 9, № 2. С. 154-171.

[2] *Судоплатов С. В.* Малые стабильные генерические графы с бесконечным весом. Безразвилочные орграфы // Матем. труды. 2007. Т. 10, № 1. С. 191-207.

[3] *Судоплатов С. В.* Малые стабильные генерические графы с бесконечным весом. Властные орграфы // Статья сдана в Матем. труды в 2006 г.

[4] *Hrushovski E.* A stable $\aleph_0$-categorical pseudoplane // Preprint. Hebrew University, Jerusalem, 1988.

[5] *Herwig B.* Weight ω in stable theories with few types // J. Symbolic Logic. 1995. V. 60, No. 2. P. 353–373.

[6] *Судоплатов С. В.* Властные орграфы // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 1. С. 205–213.

[7] *Судоплатов С. В.* Несущественные совмещения и раскраски моделей // Сиб. матем. журн. 2003. Т. 44, № 5. С. 1132–1141.

[8] *Судоплатов С. В.* Синтаксический подход к построению генерических моделей // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 2. С. 244–268.

[9] *Sudoplatov S. V.* On the finite closure property for fusions of generic classes // Мальцевские чтения. Новосибирск, 2006. http://www.math.nsc.ru/conference/malmeet/06/Abstract/Sudoplat.pdf

[10] *Hrushovski E.* Strongly minimal expansions of algebraically closed fields // Israel J. Math. 1992. V. 79. P. 129–151.

[11] *Baudisch A., Martin-Pizarro A., Ziegler M.* Hrushovski's Fusion. // Preprint. Mathematisches Institut, Freiburg, 2006.

[12] *Судоплатов С. В.* Полные теории с конечным числом счетных моделей. II // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 3. С. 314–353.